

$$\frac{2a}{2} = \frac{2a}{2} = 1 \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{2a}{2} = -1$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{-5; 1\} \quad \text{الي:}$$

$$\ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2) + \ln(2x) : \text{المعادلة} \quad ]0; +\infty[ \text{مجال}$$

$$\forall (a; b) \in (]0; +\infty[)^2 ; \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b) : \text{كل}$$

$$\forall (a; b) \in (]0; +\infty[)^2 ; \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b : \text{كل}$$

من المجال  $]0; +\infty[$  لدينا  $2x > 0$  و  $x + 2 > 0$  و  $x^2 + 5 > 0$

$$\ln(x + 2) + \ln(2x) \Leftrightarrow \ln(x^2 + 5) = \ln(2x \times (x + 2))$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 5) = \ln(2x^2 + 4x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5 = 2x^2 + 4x \quad (\text{التذكير})$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ أو } x = -5 \quad (\text{سؤال 1.1:})$$

$$S_{]0; +\infty[} = \{1\}$$

إذن  $x \in ]0; +\infty[$  فإن  $x = 1$

$$\ln(x) + \ln(x + 1) \geq \ln(x^2 + 1) : \text{المتراجحة} \quad ]0; +\infty[ \text{مجال}$$

$$\forall (a; b) \in (]0; +\infty[)^2 ; \ln(a) \geq \ln(b) \Leftrightarrow a \geq b : \text{كل}$$

من المجال  $]0; +\infty[$  لدينا  $x > 0$  و  $x + 1 > 0$  و  $x^2 + 1 > 0$

$$\ln x + \ln(x + 1) \geq \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow \ln(x^2 + x) \geq \ln(x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x \geq x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$

$$S_{]0; +\infty[} = [1; +\infty[$$

إذن :

العديدية  $(u_n)$  المعرفة بما يلي:  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = \frac{u_n}{5 + 8u_n}$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

$$\text{إذن : } \frac{u_n}{5+8u_n} > 0 \quad \text{أي : } u_{n+1} > 0$$

حسب مبدأ التراجع لدينا :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 0$

2. نضع :  $v_n = \frac{1}{u_n} + 2$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  لمزيد من دروس و تمارين و امتحانات ... موقع قلّمي

-) لنبين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q=5$ .  
ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}$

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} + 2 = \frac{5+8u_n}{u_n} + 2 = \frac{5+8u_n+2u_n}{u_n} = \frac{5(1+2u_n)}{u_n} = 5 \cdot \left( \frac{1}{u_n} + 2 \right) = 5 \cdot v_n$$

إذن :  $\forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = 5 \cdot v_n$  وبالتالي  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q=5$ .

♦ لنكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

لدينا :  $(v_n)$  متتالية هندسية . حسب صيغة الحد العام لدينا :  $v_n = v_0 q^n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  . حيث :  $q=5$

$$v_0 = \frac{1}{u_0} + 2 = \frac{1}{1} + 2 = 3 \text{ و}$$

وبالتالي :  $v_n = 3 \times 5^n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  (\*)

ب- لنكتب  $u_n$  بدلالة  $n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

لدينا :  $v_n = \frac{1}{u_n} + 2$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  . ومنه  $u_n = \frac{1}{v_n - 2}$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

إذن :  $u_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2}$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  . حسب النتيجة (\*)

♦ حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

لدينا :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$  (لأن  $5 > 1$ ) ومنه :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 \times 5^n - 2) = +\infty$

وبالتالي :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

التمرين الثالث :

1 . لنحل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $z^2 - 18z + 82 = 0$ .

لدينا مميز هذه المعادلة هو :  $\Delta = (-18)^2 - 4 \times 1 \times 82 = 324 - 328 = -4 = (2i)^2$

إذن للمعادلة المقترحة حلين عقديين مترافقين هما :  $z_1 = \frac{18+2i}{2} = 9+i$  و  $z_2 = \frac{18-2i}{2} = 9-i$

أي :  $S_{\mathbb{C}} = \{9-i ; 9+i\}$

2 . المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي أحاقها

على التوالي  $a=9+i$  و  $b=9-i$  و  $c=11-i$ .

-) لنبين أن :  $\frac{c-b}{a-b} = -i$

$$\cdot \frac{c-b}{a-b} = \frac{11-i-(9-i)}{9+i-(9-i)} = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = -i$$

♦ الاستنتاج ؛ طبيعة المثلث ABC .

$$\begin{aligned} (\overline{BA}; \overline{BC}) &\equiv \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) [2\pi] && \text{لدينا :} \\ &\equiv \arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right) [2\pi] \\ &\equiv \arg(-i) [2\pi] \\ &\equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi] \quad \left( \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \right) \end{aligned}$$

① إذن :  $(BA) \perp (BC)$  أي المثلث ABC قائم الزاوية في B

$$\left( \text{مقياس } xxx = |xxx| \right) \quad \frac{BC}{BA} = \frac{|c-b|}{|a-b|} = \frac{|c-b|}{|a-b|} = |-i| = 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\text{② وبالتالي : } \frac{BC}{BA} = 1 \quad \text{ومنه } BA = BC$$

من ① و ② نستنتج أن :  $ABC$  مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في B

ب- الشكل المثلث للعدد العقدي  $4(1-i)$

تذكير :  $z$  : لكل  $z$  من  $\mathbb{C}$  . حيث :  $|z|$  هو مقياس العدد العقدي  $z$  و  $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{لدينا :}$$

$$1-i = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \quad \text{لدينا :}$$

$$(*) \quad 4(1-i) = 4\sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \quad \text{إذن :}$$

ج- ♦ لنبين أن :  $(c-a)(c-b) = 4(1-i)$

$$\begin{aligned} (c-a)(c-b) &= (11-i-9-i)(11-i-9+i) && \text{لدينا :} \\ &= 2(2-2i) \\ &= 4(1-i) \end{aligned}$$

♦ الاستنتاج

$$\begin{aligned} AC \times BC &= |c-a| \times |c-b| && \text{لدينا :} \\ &= |(c-a)(c-b)| \\ &= |4(1-i)| \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

( حسب العلاقة (\*) )

د- ليكن  $Z$  لحق نقطة  $M$  من المستوى و  $Z'$  لحق نقطة  $M'$  صورة  $M$  بالدوران  $R$  الذي مركزه  $B$  وزاويته  $\frac{3\pi}{2}$   
 ◆ لنبين أن :  $z' = -iz + 10 + 8i$ .

لدينا:  $R$  الدوران الذي مركزه  $B(9-i)$  وزاويته  $\frac{3\pi}{2}$  ويحول  $M$  إلى  $M'$ .

$$\text{إذن : } z' - z_B = e^{\frac{3\pi}{2}} (z - z_B)$$

$$\text{يعني : } z' = e^{\frac{3\pi}{2}} (z - z_B) + z_B$$

$$z' = e^{\frac{3\pi}{2}} (z - z_B) + z_B \Leftrightarrow z' = \left( \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right) (z - 9 + i) + 9 - i$$

$$\Leftrightarrow z' = -i(z - 9 + i) + 9 - i$$

$$\Leftrightarrow z' = -iz + 9i + 1 + 9 - i$$

$$\Leftrightarrow z' = -iz + 10 + 8i$$

وبالتالي :  $z' = -iz + 10 + 8i$

◆ تحديد لحق النقطة  $C'$  صورة  $C$  بالدوران  $R$

$$R(C) = C' \Leftrightarrow z_{C'} = -iz_C + 10 + 8i$$

$$\Leftrightarrow z_{C'} = -i(11 - i) + 10 + 8i$$

$$\Leftrightarrow z_{C'} = -11i - 1 + 10 + 8i$$

$$\Leftrightarrow z_{C'} = 9 - 3i$$

إذن : لحق النقطة  $C'$  هو  $z_{C'} = 9 - 3i$

التمرين الرابع :

I . نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $g(x) = (1-x)e^x - 1$ .

1. أ- حساب  $g'(x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

ليكن  $x$  من  $\mathbb{R}$ ؛ لدينا :

$$g'(x) = ((1-x)e^x - 1)' = (1-x)' \times e^x + (1-x) \times (e^x)'$$

$$= -e^x + (1-x)e^x$$

$$= -\cancel{e^x} + \cancel{e^x} - xe^x$$

$$= -xe^x$$

إذن :  $\forall x \in \mathbb{R} ; g'(x) = -xe^x$

ب- رتبة الدالة  $g$  على كل من المجالين :  $]-\infty; 0]$  و  $[0; +\infty[$

◀ نعلم أن :  $\forall x \in \mathbb{R} ; e^x > 0$  إذن إشارة  $g'(x)$  هي عكس إشارة  $x$ . [ لأن :  $g'(x) = -xe^x$  ]

وبالتالي : إذا كان  $x \in [0; +\infty[$  فإن  $g'(x) \leq 0$ . ومنه  $g$  دالة تناقصية على المجال  $[0; +\infty[$

و إذا كان  $x \in ]-\infty; 0]$  فإن  $g'(x) \geq 0$ . ومنه  $g$  دالة تزايدية على المجال  $]-\infty; 0]$

حساب  $g(0)$  <

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$			
$g$	$-1$	$g(0)$	$-\infty$

لدينا :  $g(0) = (1-0)e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

2. لنبين أن :  $\forall x \in \mathbb{R} ; g(x) \leq 0$

لدينا : جدول تغيرات الدالة  $g$ .

$g$  دالة متصلة وتقبل  $g(0)$  كقيمة قصوية مطلقة على  $\mathbb{R}$  عند  $0$

يعني :  $\forall x \in \mathbb{R} ; g(x) \leq g(0)$

أي :  $\forall x \in \mathbb{R} ; g(x) \leq 0$  ( لأن :  $g(0) = 0$  )

## طريقة 02

لدينا :  $g$  تزايدية على :  $]-\infty; 0]$  إذن :  $\forall x \in ]-\infty; 0] ; g(x) \leq g(0)$  ( تعريف دالة تزايدية )  
ولدينا :  $g$  تناقصية على :  $]0; +\infty[$  إذن :  $\forall x \in ]0; +\infty[ ; g(x) \leq g(0)$  ( تعريف دالة تناقصية )

إذن :  $\forall x \in \mathbb{R} ; g(x) \leq g(0)$  . يعني :  $\forall x \in \mathbb{R} ; g(x) \leq 0$  ( لأن :  $g(0) = 0$  )

II لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $f(x) = (2-x)e^x - x$  . وليكن  $(\mathcal{B})$  المنحنى الممثل

للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ( $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$ )

1. أ- لنبين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

بما أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  فإن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x)e^x = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty$

ولدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2-x)e^x - x] = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$

ملاحظة : يمكن أيضا التعميل ب  $x$  ثم الحساب

ب- لنبين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

لدينا :  $(2-x)e^x - x = x \left[ \left( \frac{2}{x} - 1 \right) e^x - 1 \right]$  ومنه :  $\frac{f(x)}{x} = \left( \frac{2}{x} - 1 \right) e^x - 1$

وحيث أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{x} - 1 \right) = -1$

فإن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{2}{x} - 1 \right) e^x - 1 \right] = (-1) \times (+\infty) - 1 = -\infty$

## &lt; الاستنتاج :

بما أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  فإن  $(\mathcal{B})$  يقبل فرعاً شلجيميا في اتجاه محور الأرتيب ( السالبة ) بجوار  $+\infty$  .

2. أ- حساب النهاية :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

لدينا :  $f(x) = 2e^x - xe^x - x$

وحيث أن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 2 \times \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

فإن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - xe^x - x) = 0 - 0 + \infty = +\infty$

أي :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

◀ حساب النهاية :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$

لدينا :  $f(x) + x = 2e^x - xe^x - x + x = 2e^x - xe^x$

وحيث أن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 2 \times \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$  فإن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - xe^x) = 0$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = 0$

ملاحظة :

لدينا :  $f(x) + x = (2-x)e^x = -(x-2)e^{x-2} \times e^2$

نضع :  $x-2=t$  إذن :  $x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow t \rightarrow -\infty$

وبالتالي :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-(x-2)e^{x-2} \times e^2]$

$$= (-e^2) \times \underbrace{\lim_{t \rightarrow -\infty} (te^t)}_{=0}$$

$$= 0$$

ب- لنبين أن :  $y = -x$  :  $(D)$  مقارب مائل.

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = 0$  يعني  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)] = 0$

إذن : المستقيم  $(D)$  الذي معادلته :  $y = -x$  . مقارب مائل للمنحنى  $(\mathcal{C})$  بجوار  $-\infty$

3. - لنبين أن :  $f'(x) = g(x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

ليكن  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

لدينا :  $f'(x) = ((2-x)e^x - x)'$

$$= ((2-x)e^x)' - x'$$

$$= (2-x)'e^x + (2-x)(e^x)' - 1$$

$$= -e^x + (2-x)e^x - 1$$

$$= (1-x)e^x - 1$$

$$= g(x)$$

إذن :  $\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = g(x)$

ب- تأويل النتيجة  $f'(0) = 0$ .

نعلم أنه إذا كانت دالة  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  فإن منحنى الدالة  $f$  ؛ يقبل في النقطة ذات الأضلاع  $x_0$  ؛

مماس معاملها الموجه  $f'(x_0)$  ومعادلته :  $(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  .

\* لدينا :  $f$  دالة قابلة للاشتقاق في  $0$  كمجموع وجداء دوال قابلة للاشتقاق في  $0$

\* ولدينا :  $f'(0) = g(0) = (1-0)e^0 - 1 = 0$

إذن المنحنى (8) ؛ يقبل في النقطة  $F(0;2)$  مماس معاملته الموجه  $f'(0)=0$  أي موازي لمحور الأفاصيل .  
ج - رتابة الدالة  $f$  .

لدينا :  $\forall x \in \mathbb{R} ; g(x) \leq 0$  و  $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = g(x)$  . إذن :  $\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) \leq 0$   
وبما أن :  $f'$  تنعدم في نقطة معزولة  $0$  . فإن الدالة  $f$  تناقصية قطعاً على  $\mathbb{R}$   
جدول تغيرات الدالة  $f$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f$	$+\infty$	2	$-\infty$

4 . لنبين أن المعادلة  $f(x)=0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في  $\mathbb{R}$  وأن :  $\frac{3}{2} < \alpha < 2$

لدينا :  $f$  دالة متصلة على  $\mathbb{R}$  كمجموع وجداء دوال متصلة على  $\mathbb{R}$   
 $u : x \mapsto -x$  متصلة على  $\mathbb{R}$  لأنها حدودية  
 $v : x \mapsto 2-x$  .. .. .

$w : x \mapsto e^x$  دالة متصلة على  $\mathbb{R}$  ( .. تعريف الدالة الأسية ... )

$$f = v \times w + u \quad \text{و}$$

ولدينا :  $f$  تناقصية قطعاً على  $\mathbb{R}$

$$f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[ = ]-\infty ; +\infty[ \quad \text{و}$$

$$0 \in ]-\infty ; +\infty[ \quad \text{و}$$

إذن : حسب مبرهنة القيم الوسيطة يوجد  $\alpha$  وحيد في  $\mathbb{R}$  بحيث  $f(\alpha)=0$   
يعني أن : المعادلة  $f(x)=0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في  $\mathbb{R}$  .

$$\text{وحيث أن : } f(2) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0 \quad \text{لأن : } f(2) = -2 < 0 \quad \text{و} \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{3}{2}} - 3 \right) > 0$$

$$\text{فإن : } \frac{3}{2} < \alpha < 2 \quad (\text{حسب مبرهنة القيم الوسيطة})$$

5. -) لنحل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $f(x)+x=0$

لدينا :  $f(x) = (2-x)e^x - x$  و  $(D): y = -x$

$$f(x)+x=0 \Leftrightarrow (2-x)e^x - x + x = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-x)e^x = 0$$

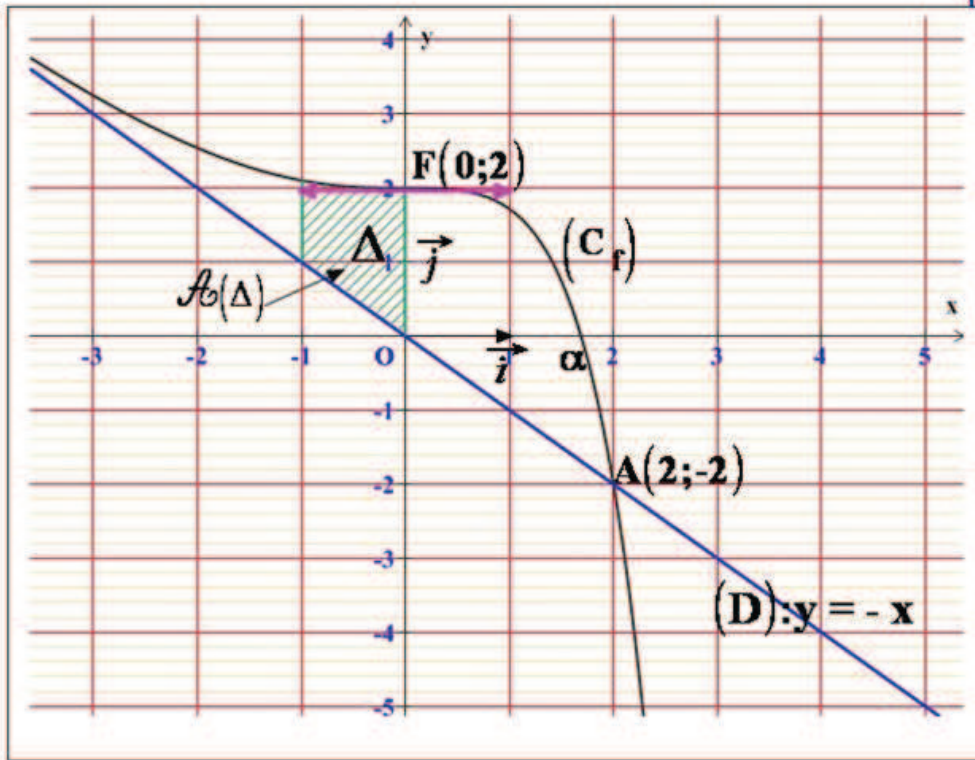
$$\Leftrightarrow 2-x=0 \quad \text{أو} \quad \underbrace{e^x=0}_{\text{غير ممكن}}$$

$$\Leftrightarrow x=2$$





ب- إنشاء المنحنى (K)

7. أ - حساب التكامل:  $\int_{-1}^0 (2-x)e^x dx$ 

$$\text{نضع : } \begin{cases} u(x) = 2-x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \quad \text{إذن : } \begin{cases} u'(x) = -1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

$u$  و  $v$  قابلتين للاشتقاق على  $[-1;0]$  بحيث  $u'$  و  $v'$  متصلتين على  $[-1;0]$

$$\int_{-1}^0 (2-x)e^x dx = \left[ (2-x)e^x \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 -e^x dx \quad \text{إذن :}$$

$$= 2 - (3e^{-1}) + \left[ e^x \right]_{-1}^0$$

$$= 2 - \frac{3}{e} + 1 - \frac{1}{e}$$

$$= 3 - \frac{4}{e}$$

$$\int_{-1}^0 (2-x)e^x dx = 3 - \frac{4}{e} \quad \text{إذن :}$$

ب- مساحة الحيز  $\Delta$  المحصور بين  $(K)$  والمستقيم  $(D)$  والمستقيمين اللذين معادلتهما  $x=0$  و  $x=-1$

$$\text{لدينا : } \mathcal{A}(\Delta) = \int_{-1}^0 |f(x) - y| dx \quad \text{بوحددة قياس المساحة}$$

بما أن  $(K)$  يوجد فوق المستقيم  $(D)$  على  $[-1;0]$ .

$$\text{فإن : } |f(x) - y| = |f(x) + x| = f(x) + x = (2-x)e^x$$

وبالتالي :  $\mathcal{A}(\Delta) = \int_{-1}^0 (2-x)e^x dx$  بوحددة قياس المساحة.

$$\text{وحسب السؤال أ- : } \mathcal{A}(\Delta) = \left( 3 - \frac{4}{e} \right) cm^2$$