التكامـــل

الثانية سلك بكالوريا علوم تجريبية

تمارين و حلول

تمرين4

1- أ/ تأكد أن $\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}=\frac{1}{t(t+2)}$

ب/ أحسب $\int_1^2 \frac{dt}{t(t+2)}dt$

2- أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

3- نضع $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx \quad ; \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx$

أحسب $I+J$ **و** $I-J$ **ثم استنتج** I **و** J

1- أ/ تأكد أن $\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}=\frac{1}{t(t+2)}$

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}=\frac{t+2-t}{t(t+2)}=\frac{1}{t(t+2)}$$

ب/ نحسب $\int_1^2 \frac{dt}{t(t+2)}dt$

$$\int_1^2 \frac{1}{t(t+2)}dt=\int_1^2 \frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}dt=\left[\ln t-\ln(t+2)\right]_1^2=\ln 2-\ln 4+\ln 3=\ln\frac{3}{2}$$

2- نحسب $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

$$A=\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx=\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-K$$

$$A=\frac{1}{2}\left(\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=.........$$

3- نضع $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx \quad ; \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx$

نحسب $I+J$

$$J+I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$$

نحسب $I-J$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x dx=\left[x^2\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x dx$$

$$I-J=\left[x^2\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-x\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\cos 2x}{2}dx$$

$I-J=\left[x^2\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-x\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ اذن $I-J=\frac{-\pi}{4}$

نستنتج I **و** J

لدينا $I-J=\frac{-\pi}{4}$ و $I+J=\frac{\pi^3}{24}$ ومنه $I=\frac{\pi^3}{48}-\frac{\pi}{8}$ و $J=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{8}$

تمرين5

نعتبر الدالة f **المعرفة على** $\mathbb{R}$ **بـ** $f(x)=e^x\left(1-e^x\right)$

1- حدد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

2- أحسب $f'(x)$ **و أعط جدول تغيرات** f **و أنشئ** C_f

3- حدد المساحة A_k **المحصور بين** C_f **و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين** $x=0$; $x=k$ **حيث** k **عدد حقيقي سالب (يمكن اعتبار** $t=e^x$**)**

4- حدد $\lim_{k\to-\infty} A_k$

$$f(x)=e^x\left(1-e^x\right)$$

4- نحدد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^x\left(1-e^x\right)=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x\left(1-e^x\right)=-\infty$$

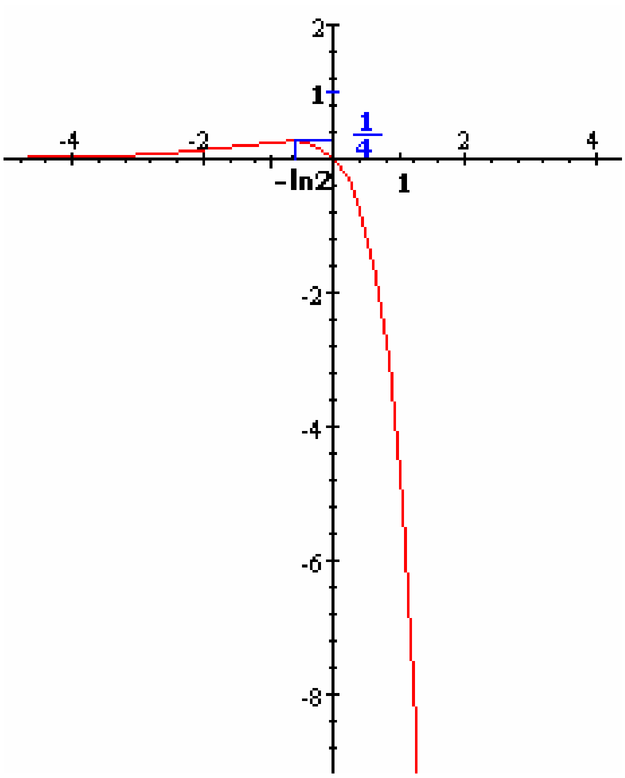
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}\left(1-e^x\right)=-\infty \quad ;$$

5- أنسب $f'(x)$ **و نعطي جدول تغيرات** f **و أنشئ** C_f

$$f'(x)=\left[e^x-e^{2x}\right]'=e^x-2e^{2x}=e^x\left(1-2e^x\right)$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$



-6 نحدد المساحة A_k

$$A_k = \int_k^0 f(x)\,dx = \int_k^0 e^x - e^{2x}\,dx$$

$$A_k = \left[e^x - \frac{1}{2}e^{2x} \right]_k^0 = \frac{1}{2} - e^k + \frac{1}{2}e^{2k}$$

-4 حدد $\lim\limits_{k \to -\infty} A_k$

$$\lim_{k \to -\infty} A_k = \lim_{k \to -\infty} \frac{1}{2} - e^k + \frac{1}{2}e^{2k} = \frac{1}{2}$$

تمارين

تمرين1

-1 حدد c ; b ; a حيث $\quad \frac{-3x^2+7x+2}{x^2-2x-3} = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-3} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-1;3\}$

أحسب $\displaystyle\int_0^2 \frac{-3x^2+7x+2}{x^2-2x-3}\,dx$

-2 أحسب $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4+x^2+3}{x^2+1}\,dx$ و $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx$

-3 بين أن $\quad \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

أحسب $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}\,dt$

تمرين2

-1 باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$; $\displaystyle\int_0^1 x^2\ln(x^2+1)\,dx$ $\quad \displaystyle\int_0^{\ln 2} (x+2)e^{2x}\,dx$

و $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$

2- حدد الدالة الأصلية لـ $x \to \sin^3 x$ التي تنعدم في0 على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^3 dx$

تمرين3

نعتبر $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$

1- أحسب I_1

2- بين $I_{n+1} = e - (n+1) I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ باستعمال المكاملة بالأجزاء.

3- أحسب I_2 I_3

4- أستنتج $\int_0^1 (x^3 + 2x^2 - 2x) e^x dx$

تمرين4

1- بين أن $1 - x \le \frac{1}{1+x} \le 1$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$

2- استنتج $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$

3- استنتج تأطيرا لـ $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$ إلى 0,1.

تمرين9

1- تحقق أن $\frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$

2- نعتبر $k \in [0;1]$.

باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب $A_k = \int_k^1 \frac{2x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$

حدد $\lim_{x \to 0} A_k$

تمرين10

1- أ- تأكد أن $\frac{t^2 - t + 1}{t(t^2+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2+1}$

ب- أحسب $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2 - t + 1}{t(t^2+1)} dt$

2- أحسب $\int_0^1 (3x^2 + 2x + 1) \ln(x+1) dx$ باستعمال المكاملة بالأجزاء

تمرين11

1- تأكد أن $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$

2- أحسب $I(\alpha) = \int_\alpha^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$ باستعمال المكاملة بالأجزاء حيث $\alpha \in]0;1[$

3- أحسب $\lim_{\alpha \to 0^+} I(\alpha)$

تمرين12

نعتبر $n \in \mathbb{N}^*$ و $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx \quad ; I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$

1- أحسب I_1 و استنتج $I_3 \quad ; \quad I_5$

2- أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x dx$ و استنتج $I_{n+2} - I_n$ بدلالة n.

3- أ- بين أن الدالة $x \to \ln\left[tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$ دالة أصلية للدالة $x \to \frac{1}{\cos x}$ على $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

ب- استنتج I_0 ثم $I_2 \quad ; \quad I_4$